Федеральное агентство по образованию

ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра автоматизации технологических процессов

Типовые звенья систем автоматического управления (колебательное звено)

Для студентов 3 курса специальностей 1905500
"Биотехнические и медицинские аппараты и системы"
и 1906600 "Инженерное дело в медико-биологической практике "
по курсу “Управление в медико-биологических системах ”

Тверь 2005

УДК [681.326+681322](075.8)
ББК 32.965 Я7

Методические указания предназначены для студентов 3 курса специальностей 1905500 "Биотехнические и медицинские аппараты и системы" и 1906600 "Инженерное дело в медико-биологической практике" по курсу “Управление в медико-биологических системах ”. Содержит основные сведения о колебательном звене теории систем автоматического управления, его переходных и частотных характеристиках.

Обсуждено на заседании кафедры и рекомендовано к печати (протокол N 14 от 21 июня 2005 г.).

Составитель В.Г. Васильев.

Содержание

1. Временные характеристики колебательного звена

Звено называется колебательным, если при подаче на его вход единичного ступенчатого воздействия процесс изменения его выходной величины будет иметь форму затухающих амплитудных колебаний. Типичная для колебательного звена переходная характеристика приведена на рис. 1.

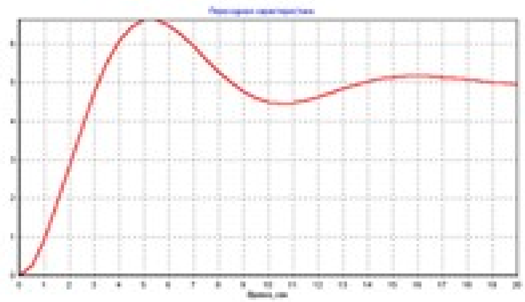

Рис.1. Переходная характеристика колебательного звена

Связь между величиной на выходе и величиной на входе такого звена определяется следующим дифференциальным уравнением второго порядка:

$$T_1^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_2 \frac{dy}{dt} + y = Kx, \qquad (1.1)$$

где К- коэффициент усиления, а T_1 и T_2 - постоянные времени звена. При этом должно быть выполнено условие

$$T_2 < 2T_1 .$$

Так что корни характеристического уравнения – комплексные.

Из (1.1) следует, что передаточная функция звена имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}. \qquad (1.2)$$

Часто передаточную функцию записывают в виде

$$W(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{k}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}, \qquad (1.3)$$

где ω_0 - собственная частота незатухающих колебаний звена, а ξ - степень затухания (успокоения).

Возможна и такая запись передаточной функции:

$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}. \qquad (1.4)$$

Сравнивая (1.2) , (1.3) и (1.4) можно записать:

- постоянная времени звена $T_1 = \frac{1}{\omega_0} = T$;
- постоянная времени звена $T_2 = \frac{2\xi}{\omega_0}$;
- степень затухания $\xi = \frac{T_2}{2T_1}$.

Запишем передаточную функцию (1.1) в виде

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2p^2 + T_2p + 1} = \frac{k_3k_4}{(T_3p+1)(T_4p+1)}, \qquad (1.5)$$

где $T_1^2 = T_3T_4$ и $T_2 = T_3 + T_4$, и найдем корни полиномов знаменателей этого выражения:

$$p_1 = \frac{-T_2 + \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} = -\frac{1}{T_3}; \qquad (1.6)$$

$$p_2 = \frac{-T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} = -\frac{1}{T_4}, \qquad (1.7)$$

откуда находим

$$T_3 = \frac{2T_1^2}{T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}; \; T_4 = \frac{2T_1^2}{T_2 + \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}. \qquad (1.8)$$

Далее запишем (1.5) как

$$W(p) = \frac{k_3k_4}{(T_3p+1)(T_4p+1)} = \frac{\frac{k_3k_4}{T_3T_4}}{\left(p + \frac{1}{T_3}\right)\left(p + \frac{1}{T_4}\right)}.$$

Обозначим

$$Z = \frac{k_3k_4}{T_3T_4} \; \alpha = \frac{1}{T_3} \; \beta = \frac{1}{T_4}.$$

Тогда

$$W(p) = \frac{Z}{(p+\alpha)(p+\beta)}.$$

Данному изображению соответствует оригинал

$$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)} \leftrightarrow \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}.$$

Найдем весовую функцию звена

$$g(t) \equiv y(t) = Z\left[\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}\right] = \frac{k_3 k_4}{T_3 T_4}\left[\frac{e^{-\frac{t}{t_3}} - e^{-\frac{t}{t_4}}}{\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}}\right] = \frac{k_3 k_4}{T_3 - T_4}\left[e^{-\frac{t}{t_3}} - e^{-\frac{t}{t_4}}\right].$$

Обозначим $L = \dfrac{k_3 k_4}{T_3 - T_4}$ и найдем переходную функцию звена:

$$h(t) = L\int_0^t e^{-\frac{t}{T_3}} d\tau - L\int_0^t e^{-\frac{t}{T_4}} d\tau = -LT_3 e^{-\frac{t}{T_3}}\Big|_0^t + LT_4 e^{-\frac{t}{T_4}}\Big|_0^t = -LT_3 e^{-\frac{t}{T_3}} + LT_3 + LT_4 e^{-\frac{t}{T_4}} - LT_4 = \qquad (1.9)$$

$$= \frac{k_3 k_4}{T_3 - T_4}\left[(T_3 - T_4) - T_3 e^{-\frac{t}{T_3}} + T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}\right] = k_3 k_4\left[1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}}\right].$$

Далее, используя соотношения (1.8), найдем

$$\frac{T_3}{T_3 - T_4} = \frac{1}{2}\frac{T_2}{\sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}} + \frac{1}{2}; \qquad (1.10)$$

$$\frac{T_4}{T_3 - T_4} = \frac{1}{2}\frac{T_2}{\sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}} - \frac{1}{2}.$$

Обозначим $d = \sqrt{4T_1^2 - T_2^2}$ и, учитывая (1.10), можно записать

$$\frac{T_3}{T_3 - T_4} = \frac{T_2}{2jd} + \frac{1}{2}; \qquad (1.11)$$

$$\frac{T_4}{T_3 - T_4} = \frac{T_2}{2jd} - \frac{1}{2}.$$

Далее с учетом (1.8) находим

$$e^{-\frac{t}{T_3}} = e^{-t\left[\frac{T_2 - jd}{2T_1^2}\right]} = e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}} e^{j\frac{dt}{2T_1^2}}; \qquad (1.12)$$

$$e^{-\frac{t}{T_4}} = e^{-t\left[\frac{T_2 + jd}{2T_1^2}\right]} = e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}} e^{-j\frac{dt}{2T_1^2}}.$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в (1.10), получим

$$y(t) = k_3 k_4\left[1 - \left(\frac{T_2}{2jd} + \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}} e^{j\frac{dt}{2T_1^2}} + \left(\frac{T_2}{2jd} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}} e^{-j\frac{dt}{2T_1^2}}\right] =$$

$$= -k_3 k_4\left[1 - \left(\frac{T_2}{2jd}e^{j\frac{dt}{2T_1^2}} - \frac{T_2}{2jd}e^{-j\frac{dt}{2T_1^2}}\right)e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}} - \left(\frac{1}{2}e^{j\frac{dt}{2T_1^2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{dt}{2T_1^2}}\right)e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}}\right] =$$

$$= k_3 k_4\left[1 - \left(\frac{T_2}{d}\sin\frac{dt}{2T_1^2} + \cos\frac{dt}{2T_1^2}\right)e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}}\right].$$

Или в окончательном виде

$$y(t)=k\left[1-e^{-\frac{tT_2}{2T_1^2}}\left(\frac{T_2}{d}\sin\frac{dt}{2T_1^2}+\cos\frac{dt}{2T_1^2}\right)\right], \tag{1.13}$$

где к = $к_1к_2$.

Обозначим:

$T=\dfrac{2T^2{}_1}{T_2}$ - постоянная времени затухания амплитуды колебаний (время затухания колебаний будет $t_c \approx 3T$).

В выражении (1.13) под знаком sin (.) и cos (.) множитель $\dfrac{d}{2T_1^2}$ имеет смысл частоты ω_0 незатухающих колебаний звена

$$\omega_0=\frac{d}{2T_1^2}=\frac{\sqrt{4T_1^2-T_2^2}}{2T_1^2}.$$

Умножим левую и правую части этого выражения на постоянную времени затухания колебаний $T=\dfrac{2T^2{}_1}{T_2}$. В результате получим

$$\omega_0 T=\frac{\sqrt{4T_1^2-T_2^2}}{T_2}.$$

Обратная величина $\dfrac{1}{\omega_0 T}=\dfrac{T_2}{\sqrt{4T_1^2-T_2^2}}=\dfrac{T_2}{d}$, что соответствует множителю в выражении (1.13) перед знаком sin(.).

Тогда выражение (1.13) принимает вид

$$y(t)=K\left[1-e^{-\frac{t}{T}}\left(\cos\omega_0 t+\frac{1}{\omega_0 T}\sin\omega_0 t\right)\right].$$

Это выражение можно записать и в другом виде. Для этого сделаем следующие преобразования

$$\omega_0=\frac{d}{2T_1^2}=\frac{\sqrt{4T_1^2-T_2^2}}{2T_1^2}=\frac{\frac{1}{2T_1}\sqrt{4T_1^2-T_2^2}}{\frac{1}{2T_1}2T_1^2}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{T_2}{2T_1}\right)^2}}{T_1}=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}; \tag{1.14}$$

$$\frac{T_2}{d}=\frac{T_2}{\sqrt{4T_1^2-T_2^2}}=\frac{\frac{T_2}{2T_1}}{\frac{1}{2T_1}\sqrt{4T_1^2-T_2^2}}=\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

где $\xi=\dfrac{T_2}{2T_1}$ - параметр затухания. С учетом полученных соотношений будем иметь

$$y(t)=K\left[1-e^{-\frac{t\xi}{T_1}}\left(\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}t\right)\right].$$

Анализ показывает, что при ξ=0 (T_2 = 0) колебания являются незатухающими

$$y(t)=k[1-\cos(\omega_0 t)]$$

и частота, с которой будут происходить колебания, $\omega_0=\frac{1}{T_1}$. Отсюда становится ясным справедливость записи

$$W(p)=\frac{k}{T_1^2p^2+T_2p+1}=\frac{\frac{k}{T_1^2}}{p^2+\frac{T_2}{T_4^2}p+\frac{1}{T_1^2}}=\frac{k\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0p+\omega_0^2}$$

и понятна роль постоянной времени T_2. Постоянная T_2 характеризует демпфирование (ослабление) колебаний (чем она больше, тем больше степень затухания амплитуд переходного процесса). Постоянная T_1 "раскачивает" колебания (чем больше T_1, тем меньше степень затухания $\xi=\frac{T_2}{2T_1}$).

Говорят, что при ξ =0 система не демпфирована. При ξ >0 – система не дедемпфирована; при ξ =1 – система обладает критическим демпфированием, при ξ >1 – система передемпфирована.

При ξ = 1 $2T_1 = T_2$ и колебания вырождаются в апериодический процесс ($\omega_0 = 0$).

При T_2 = 0 характеристическое уравнение звена принимает вид

$$T_1^2p^2+1=0$$

и будет иметь чисто мнимые корни

$$p_{1,2}=\pm j\frac{1}{T_1}=\pm j\omega_0,$$

что и объясняет режим незатухающих колебаний в звене.

При T_1 = 0 характеристическое уравнение звена принимает вид как и для апериодического звена с одним действительным корнем. Переходный процесс будет иметь апериодический характер.

Характеристическое уравнение

$$T_1^2p^2+T_2p+1=0$$

имеет комплексно-сопряженные корни $p_{1,2}=-\frac{1}{T}\pm j\omega_0$ с отрицательной вещественной частью, чем и объясняется режим затухающих колебаний.

2. Частотные характеристики колебательного звена

Из (1.2) следует, что амплитудная фазовая частотная характеристика звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_1^2(j\omega)^2 + T_2(j\omega) + 1} = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2\omega + 1} = \tag{2.1}$$

$$= \frac{k(1 - T_1^2\omega^2) - jkT_2\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2} = \frac{k\left[1 - T_1^2\omega^2\right]}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2} - J\frac{kT_2\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}.$$

Годограф амлитудно-фазочастотной характеристики приведен на рис. 2.

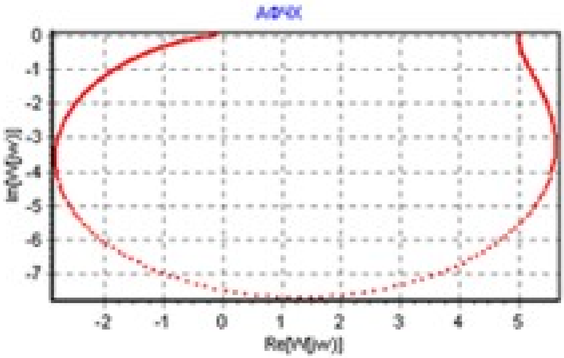

Рис. 2. Годограф амлитудно-фазочастотной характеристики колебательного звена

Находим амплитудно-частотную характеристику

$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right| = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - T_1^2\omega^2\right)^2 + T_2^2\omega^2}} \tag{2.2}$$

и фазочастотную характеристику звена

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{-T_2^2\omega^2}{\left(1 - T_1^2\omega^2\right)}\right). \tag{2.3}$$

Вид характеристик приведен на рис. 3.

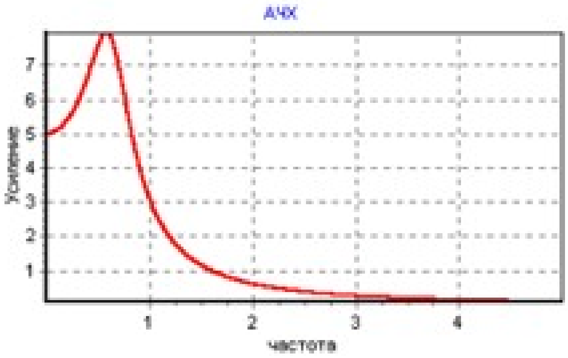

Рис. 3.а. Амплитудно-частотная характеристика

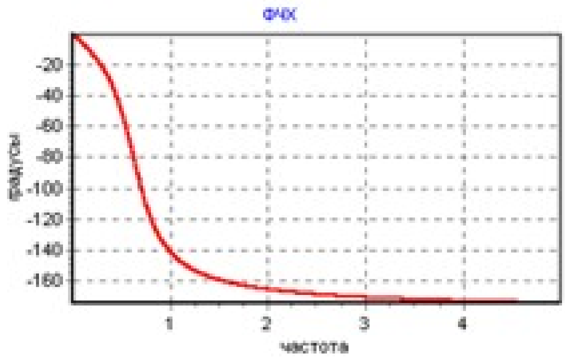

Рис. 3.б. Фазо-частотная характеристика

Существование максимума на амлитудно-частотной характеристике означает, что система обладает резонансными свойствами, а в переходном процессе будет наблюдаться перерегулирование. Для систем более высокого порядка чем больше максимум АЧХ, тем сильнее выражен резонанс и тем больше перерегулирование в переходном процессе. Поэтому желательно, чтобы САР не обладала ярко выраженными резонансными свойствами.

Так как $\omega_0 = \dfrac{1}{T_1}$, то амплитудно-частотную характеристику можно записать в виде

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \qquad (2.4)$$

Найдем при какой частоте ω характеристика A(ω) имеет максимум. Обозначим эту резонансную частоту - ω_2.

Положим $\boldsymbol{x} = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Тогда выражение (2.4) можно представить в виде

$$A(x) = ky(x),$$

где

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^2 + \left(2\xi x\right)^2}}.$$

Найдем производную y(x), а затем для того чтобы найти экстремум функции, приравняем ее нулю.

$$y^{I}(x) = -\frac{1}{2}\left(\left(1-x^2\right)^2+\left(2\xi x\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(2\left(1-x^2\right)\left(-2x\right)+2\left(2\xi x\right)2\xi\right) =$$

$$= \frac{2x\left(1-\xi^2-x^2\right)}{\sqrt{\left(\left(1-x^2\right)^2+\left(2\xi x\right)^2\right)^3}}.$$

Приравняем числитель этого выражению к нулю:

$$2x\,(1 - 2\xi^2 - x^2) = 0,$$

откуда находим: первый максимум при x = 0. Второй максимум будет иметь место при

$$x = \sqrt{1-2\xi^2},$$

или с учетом обозначения

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}.$$

Подставим это выражение в (2.4). Тогда

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}{\omega_0}\right]^2}} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{4\xi^4+4\xi^2-8\xi^4}} = \frac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Из последнего выражения следует, что при ξ, стремящемся к нулю, амплитуда колебаний будет стремиться к бесконечности, что с физической точки зрения означает явление резонанса. Вид кривых АЧХ в зависимости ζ приведен на рис. 4.

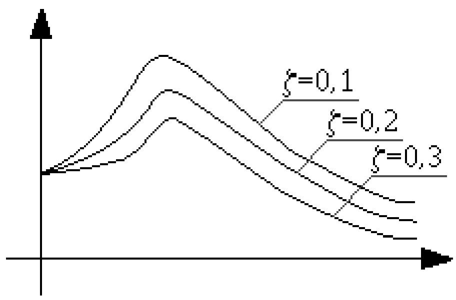

Рис. 4. Зависимость АЧХ колебательного звена от коэффициента затухания

3. Построение переходной характеристики колебательного звена с помощью цифровых ЭВМ

Для построения переходного процесса в звене с помощью ЭВМ требуется программа для решения системы дифференциальных уравнений. Колебательное звено описывается системой из двух дифференциальных уравнений. Их можно получить из дифференциального уравнения звена

$$T_1^2 \frac{d^2y}{dt^2} + T_2 \frac{dy}{dt} + y = Kx$$

следующим образом. Положив в этом уравнении

$$z_1 = y \text{ и } z_2 = \frac{dy(t)}{dt},$$

получим нормальную систему дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{z}_1 = z_2,$$

$$\dot{z}_2 = [kx - z_1 - z_2 T_2]/T_1^2),$$

которую и нужно решить при соответствующих начальных условиях.

Использованная литература

1. Егоров К.В. Основы теории автоматического управления. М.: Энергия, 1967. 648 с.
2. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 615 с.
3. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1979. 249 с.

ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
(КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО)

Для студентов 3 курса специальностей 1905500
"Биотехнические и медицинские аппараты и системы"
и 1906600 "Инженерное дело в медико-биологической практике "
по курсу “Управление в медико-биологических системах ”

Составитель В. Г. Васильев
Редактор В.А. Румянцева
Технический редактор Г.В. Комарова

Подписано в печать 28.09.05
Формат 60 х 84/16 Бумага писчая
Физ.печ.л 0,75 Усл.-печ.л. 0,70 Уч.-изд. л. 0,65

Тверь. Издательство ТГТУ